Specialieji analizės skyriai

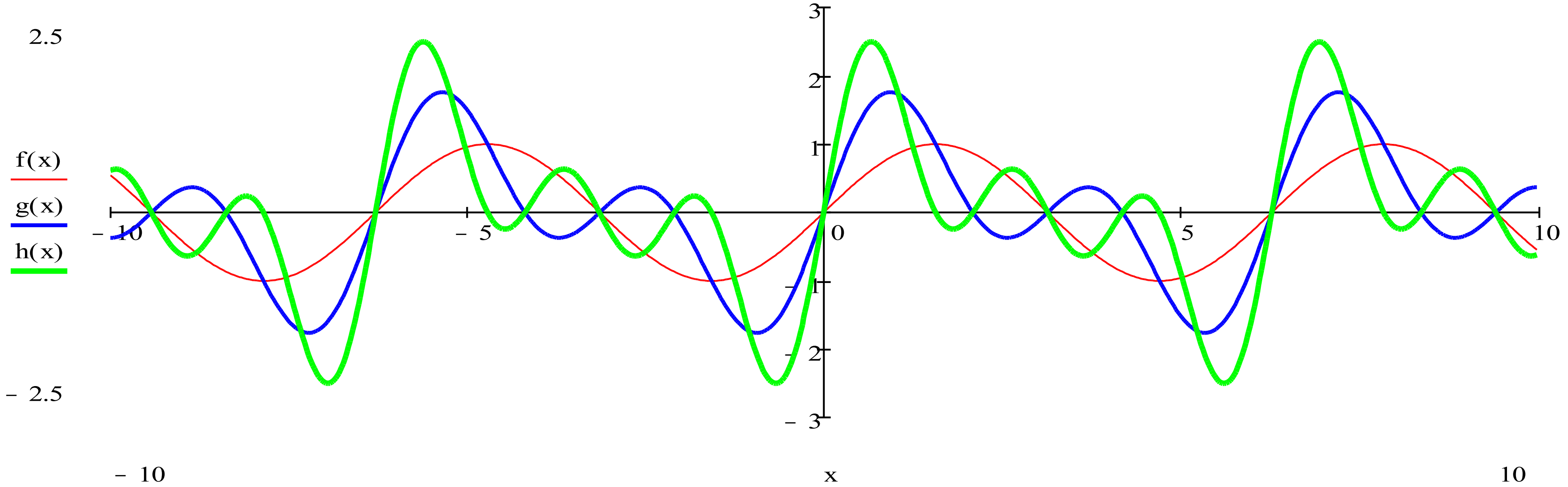
.

Trigonometrinės Furje eilutės

- Moksle ir technikoje dažnai susiduriame su <u>periodiniais</u> reiškiniais, apibūdinamais periodinėmis laiko funkcijomis: $f(t)$.

- Paprasčiausia periodinė funkcija: $y = A\sin(\omega t + \alpha)$, su periodu $T = 2\pi/\omega$, kur ω – dažnis.

- Iš tokių paprasčiausių periodinių funkcijų galima sudaryti sudėtingesnių. Aiškų, kad turime sudėti skirtingų dažnių funkcijas, nes sudėję vienodo dažnio sinusus, vėl gautume to paties dažnio sinusą.



Trigonometrinės Furje eilutės

• Atvirkštinis klausimas: ar galima duotąją periodinę funkciją $\varphi(t)$ su periodu T, išreikšti sinusų suma?

• Pasirodo, kad gana daug funkcijų galima taip išreikšti, bet reikia imti begalinį kiekį dėmenų:

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \ldots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n).$$

• Jeigu kiekvieną sinusą laikysime harmoninių svyravimų, tai galime sakyti, kad sudėtingą judėjimą, aprašoma funkcija $\varphi(t)$, išskaidėme atskirais harmoniniais svyravimais.

• Periodinės funkcijos skaidymas į harmonikas procesas vadinamas <u>harmoninė analizė</u>.

Trigonometrinės Furje eilutės

- Pažymėkime

$$x = \omega t = \frac{2\pi}{T} t ,$$

$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right) = f(x).$$

- Funkcija $f(x)$ irgi bus periodinė, bet su periodu 2π. Tuomet

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\sin nx \cos\alpha_n + \cos nx \sin\alpha_n).$$

- Pažymėję

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n \sin\alpha_n = a_n , \quad A_n \cos\alpha_n = b_n$$

gauname, kad periodinė su periodu 2π funkcija $f(x)$ išreiškiama trigonometrine eilute

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Funkcijų ortogonalumas

- Funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ vadinamas ortogonaliomis atkarpoje $[a; b]$, jei

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

- Funkcijų seka $\{\varphi_n(x)\}$ vadinama ortogonalia atkarpoje $[a; b]$, jei

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad \forall\, n \neq m.$$

Pvz., $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots$

- Funkcijų seka $\{\varphi_n(x)\}$ vadinama ortonormuota atkarpoje $[a; b]$, jei

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Furje eilutė ir jos koeficientai

- Tarkime, kad periodinę su periodu 2π funkciją $f(x)$ galima išreikšti trigonometrine eilute, tolygiai konverguojančia atkarpoje $[-\pi; \pi]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

- Kaip rasti koeficientus a_0, a_n, b_n ?
- Integruojame

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x}_{=0}+b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x}_{=0}.$$

- Taigi

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Furje eilutė ir jos koeficientai

- Norėdami rasti a_n, dauginame iš cos mx ir integruojame:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx \,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \,\mathrm{d}x}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \,\mathrm{d}x}_{=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \,\mathrm{d}x}_{=0}.$$

- Taigi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{d}x = \pi a_n$$

ir

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x.$$

Furje eilutė ir jos koeficientai

- Norėdami rasti b_n, dauginame iš sin mx ir integruojame:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\mathrm{d}x}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \sin mx\,\mathrm{d}x}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x}_{=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}}.$$

- Taigi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi b_n$$

ir

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x .$$

Furje eilutė ir jos koeficientai

- Skaičiai a_0, a_n, b_n vadinami funkcijos $f(x)$ Furje koeficientais, o trigonometrinė eilutė

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

- funkcijos $f(x)$ Furje eilute.

- Įrodysime, kad periodinės su periodu 2π funkcijos integravimo intervalą galime pakeisti bet kuriuo kitu intervalu $[a; a+2\pi]$.

$$I = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Paskutiniame integrale darome keitinį $x = 2\pi + t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$:

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(2\pi + t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Furje eilutė ir jos koeficientai

- Gauname, kad

$$I = \int_{a}^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x .$$

- Įrašę vietoje a = -π , turime

$$I = \int_{0}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x .$$

- Taigi, Furje koeficientų formules galima užrašyti taip:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x , \quad n\in\mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x , \quad n\in\mathbb{N}$$

Furje eilutė ir jos koeficientai

- Matome, kad Furje koeficientus galima apskaičiuoti bet kuriai integruojamai atkarpoje $[-\pi; \pi]$ funkcijai su periodu 2π .

- Ar visada Furje eilutė konverguoja?

- Funkcija $f(x)$ vadinama dalimis monotonine intervale, jei šį intervalą galima išskaidyti į baigtinį dalinių intervalų skaičių, tokių, kad kiekviename daliniame intervale funkcija $f(x)$ yra monotoninė.

- Jei funkcija $f(x)$ yra periodinė su periodu 2π ir dalimis monotoninė intervale $[a; a+2\pi]$, tai šios funkcijos Furje eilutė konverguoja visose **R** taškuose. Tolydumo taškuose eilutė konverguoja į $f(x)$, trūkio taškuose - į

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

Lyginių ir nelyginių funkcijų Furje eilutės

- Jei funkcija $f(x)$ – lyginė, tai

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Jei funkcija $f(x)$ – nelyginė, tai

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Lyginių ir nelyginių funkcijų Furje eilutės

- Jei funkcija $f(x)$ yra periodinė su periodu 2π ir lyginė, tai

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$b_n = 0$$

- Lyginės funkcijos Furje eilutė:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Lyginių ir nelyginių funkcijų Furje eilutės

- Jei funkcija $f(x)$ yra periodinė su periodu 2π ir nelyginė, tai

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

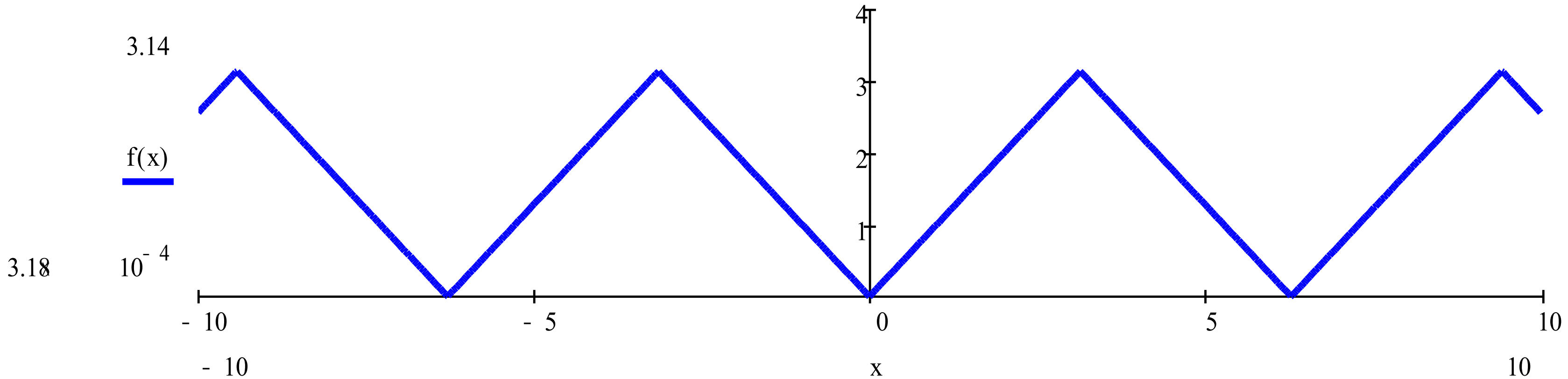
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d} x , \quad n \in \mathbb{N}$$

- Nelyginės funkcijos Furje eilutė:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

Furje eilučių pavyzdžiai

- Periodinė su periodu 2π funkcija $f(x) = |x|$, $-\pi \le x \le \pi$.

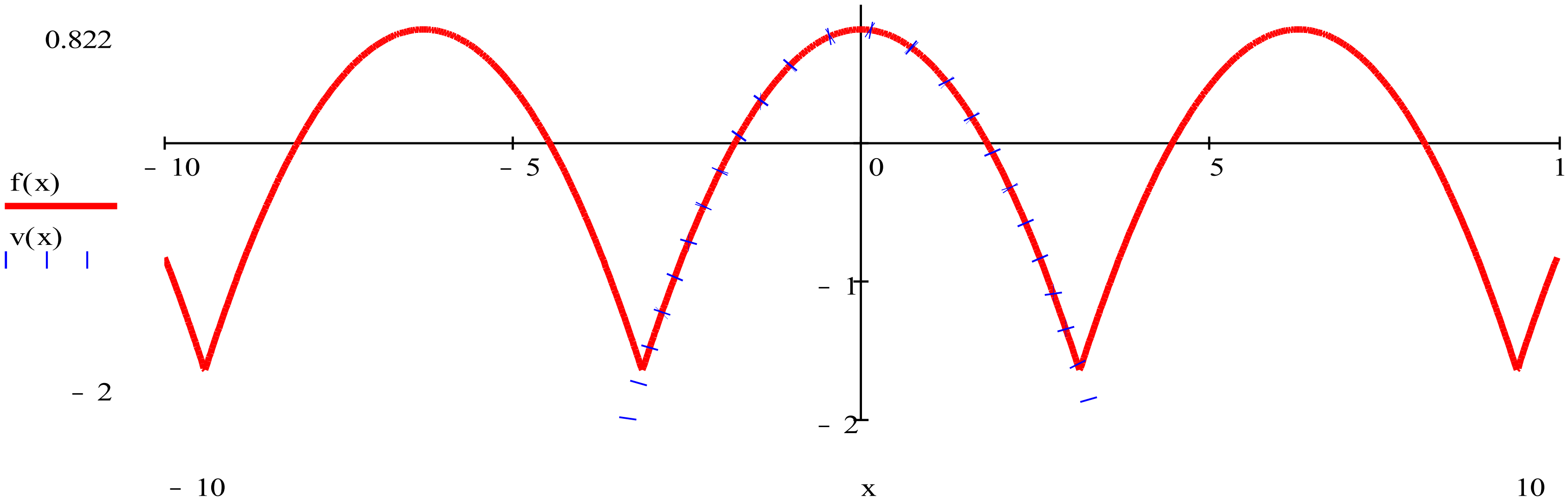


$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Furje eilučių pavyzdžiai

- Periodinė su periodu 2π funkcija

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

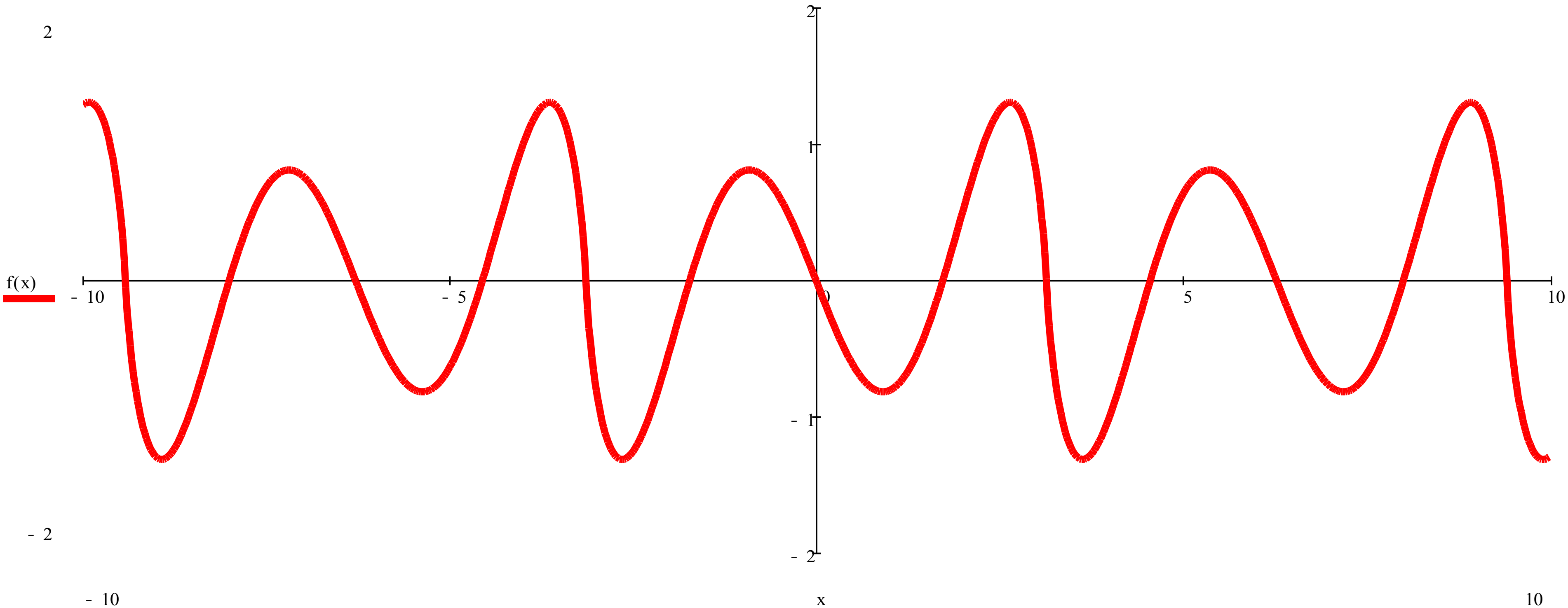


$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Furje eilučių pavyzdžiai

- Periodinė su periodu 2π funkcija

$$f(x) = 2\sin x - x(1+\cos x) - \sin x \ \ln\left|2+2\cos x\right|, \quad x\in[-\pi,\ \pi].$$



$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n-1)}, \quad x\in[-\pi,\ \pi].$$

Funkcijų išreiškimas Furje eilute atkarpoje [0, π]

- Tarkime, kad funkcija $f(x)$ apibrėžta atkarpoje $[0, \pi]$. Norėdami $f(x)$ išreikšti Furje eilute šioje atkarpoje, $f(x)$ pratęsiame į atkarpą $[-\pi, 0]$.

- Sudarome naują funkciją, kuri apibrėžta atkarpoje $[-\pi, \pi]$.

1 būdas. $f(x)$ pratęsiame taip, kad nauja $f_1(x)$ būtų lyginė:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Gavome lyginę funkciją, kurios Furje eilutę sudaro tik kosinusų nariai:

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx .$$

Kadangi $f_1(x) = f(x)$, kai $0 \le x \le \pi$, tai $f_1(x)$ eilutė ir bus $f(x)$ eilutė atkarpoje $[0, \pi]$.

Funkcijų išreiškimas Furje eilute atkarpoje [0, π]

2 <u>būdas</u>. $f(x)$ pratęsiame taip, kad $f_2(x)$ būtų nelyginė:

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Šiuo atveju gavome nelyginę funkciją, atkarpoje [$-\pi$, π]:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

Kadangi $f_2(x) = f(x)$, kai $0 \le x \le \pi$, tai $f_2(x)$ eilutė ir bus $f(x)$ eilutė atkarpoje [0, π].

Funkcijų su periodu 2l Furje eilutės

- Tarkime, kad $f(x)$ – periodinė su periodu $2l$ funkcija atkarpoje $[-l, l]$.

- Įveskime keitinį $x = lt/\pi$. Tuomet $f(lt/\pi) = \varphi(t)$ – periodinė su periodu 2π, nes $\varphi(t+2\pi) = f(l(t+2\pi)/\pi) = f(lt/\pi+2l) = f(lt/\pi) = \varphi(t)$.

- Funkciją $\varphi(t)$ skleidžiame Furje eilute atkarpoje $[-\pi, \pi]$:

$$\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos nt \, \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin nt \, \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}$$

Funkcijų su periodu 2l Furje eilutės

- Grįžtame prie kintamojo x, $t = \pi x / l$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

- Keičiame kintamąjį integraluose, ir gauname:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$$

Funkcijų su periodu 2l Furje eilutės

- Kai $f(x)$ - lyginė atkarpoje $[-l, l]$, tai $b_n=0$, o

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

- Kai $f(x)$ - nelyginė atkarpoje $[-l, l]$, tai $a_n=0$, o

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Furje eilutės kompleksinė forma

- Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ Furje eilutė atkarpoje $[-\pi, \pi]$ yra tokia:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

- Panaudoję Eulerio formulę, turime

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-i\,b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}.$$

- Ši išraiška vadinama funkcijos $f(x)$ Furje eilutės kompleksine forma.

- Raskime Furje koeficientus.

$$c_n=\frac{a_n-i\,b_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Furje eilutės kompleksinė forma

- Kai funkcija $f(x)$ periodinė su periodu $2l$, jos Furje eilutės kompleksinė forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}},$$

- O Furje koeficientai -

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Furje integralas

- Tarkime, kad periodinė su periodu 2*l* funkcija *f*(*x*) yra tolydi ir turi tolydžią išvestinę ***R***, išskyrus, gal būt, baigtinį taškų skaičių atkarpoje [-*l*, *l*]. Be to, šiuose taškuose egzistuoja baigtinės *f*(*x*) ir *f* '(*x*) ribos iš kairės ir iš dešinės. Kiekvieną *f*(*x*) galime išreikšti Furje eilute:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

kurios koeficientai apibūdinami formulėmis

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$$

Furje integralas

- Dabar tarkime, kad *f*(*x*) yra <u>neperiodinė</u>, dalimis glodi bet kurioje ***R*** atkarpoje ir absoliučiai integruojama ***R***:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x = M < \infty .$$

- Furje integralo išraišką gauname iš periodinės funkcijos Furje eilutės:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{\pi n (t - x)}{l} \, \mathrm{d}t .$$

- Pažymėkime $\omega_1 = \dfrac{\pi}{l}, \quad \omega_2 = \dfrac{2\pi}{l}, \quad \ldots, \quad \omega_n = \dfrac{n\pi}{l}, \quad \ldots, \quad \Delta\omega_n = \dfrac{\pi}{l} .$
- Tuomet

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \cos(\omega_n (t - x)) \, \mathrm{d}t \right) \Delta\omega_n .$$

Furje integralas

- Tarkime, kad $l \to \infty$ (funkcija iš periodinės tampa neperiodine). Aišku, kad

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{M}{2l} \to 0.$$

- Pažymėkime $\Phi(\omega_n) = \int_{-l}^{l} f(t)\cos(\omega_n(t-x))\,\mathrm{d}t$

- Gauname integralinę sumą

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos(\omega_n(t-x))\,\mathrm{d}t \right)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\omega_n)\Delta\omega_n .$$

- Perėję prie ribos, kai $l \to \infty$, turime

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega(t-x))\,\mathrm{d}t \right)\mathrm{d}\omega .$$

Furje integralas

- Dvilypiam Furje integralui suteiksime kitą išraišką

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos\omega x \,\mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \sin\omega x \,\mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t \,\mathrm{d}t$$

- Pažymėkime

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t \,\mathrm{d}t, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t \,\mathrm{d}t.$$

- Tada

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left(a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x\right)\mathrm{d}\omega.$$

- Analogija su Furje eilute.

Lyginių ir nelyginių funkcijų Furje integralas

- Kai $f(x)$ – lyginė funkcija, tai

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t, \quad b(\omega) = 0.$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} a(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega.$$

- Kai $f(x)$ – nelyginė funkcija, tai

$$a(\omega) = 0, \quad b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t.$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} b(\omega)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega.$$

- Kai $f(x)$ yra aprėžta intervale $(0,+\infty)$ arba $(-\infty,0)$, tai ją tikslinga apibrėžti priešingoje ašies pusėje taip, kad ji būtų lyginė, arba nelyginė. Tada galima taikyti aukščiau išvestas formules.

Lyginių ir nelyginių funkcijų Furje integralas

- Norėdami simetrizuoti šias formules, pažymėkime

$$\tilde{a}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, \mathrm{d} t,$$

$$\tilde{b}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, \mathrm{d} t,$$

- Tuomet, kai *f*(*x*) – lyginė funkcija

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{a}(\omega) \cos \omega x \, \mathrm{d} \omega.$$

- Kai *f*(*x*) - nelyginė,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{b}(\omega) \sin \omega x \, \mathrm{d} \omega.$$

- Funkcija ***a*** vadinama funkcijos *f*(*x*) Furje <u>kosinuso</u> <u>transformacija</u>, ***b*** - Furje <u>sinuso</u> <u>transformacija</u>.

Kompleksinė Furje integralo forma

- Furje integralą išreikšime kompleksine forma:

$$a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x = c(\omega)e^{i\omega x} + \overline{c(\omega)}e^{-i\omega x},$$

čia

$$c(\omega) = \frac{a(\omega) - i\,b(\omega)}{2}; \quad \overline{c(\omega)} = \frac{a(\omega) + i\,b(\omega)}{2} = c(-\omega).$$

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad \omega \geqslant 0.$$

- Todėl

$$\int\limits_0^{\lambda} (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)\,\mathrm{d}\omega = \int\limits_0^{\lambda} (c(\omega)e^{i\omega x} + c(-\omega)e^{-i\omega x})\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= \int\limits_0^{\lambda} c(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega - \int\limits_0^{-\lambda} c(\tilde{\omega})e^{i\tilde{\omega} x}\,\mathrm{d}\tilde{\omega} = \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} c(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$

Kompleksinė Furje integralo forma

- Tuomet

$$f(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\lambda} (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} c(\omega) e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega .$$

- Taigi

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega ,$$

kur

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t .$$

- Tai yra Furje integralo kompleksinė forma.

Furje transformacija

- Funkcija

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\, t$$

vadinama $f(x)$ tiesiogine Furje transformacija.

- Išreiškiame $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega .$$

Funkcija $f(x)$ vadinama atvirkštine Furje transformacija.

- Dažnai tiesioginės ir atvirkštinės Furje transformacijos užrašomos simetrizuotai:

$$\Phi(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\, t$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega .$$

Operacinis skaičiavimas. Pirmvaizdžio sąvoka.

- Realaus kintamojo t kompleksinę funkciją $f(t)$ vadiname pirmvaizdžiu, kai
  1) $f(t)$ intervale $(0, \infty)$ yra tolydi arba turi baigtinį pirmojo tipo trūkių skaičių;
  2) $f(t) = 0$, kai $t < 0$;
  3) egzistuoja tokie skaičiai M, $\sigma > 0$, kad $|f(t)| \le Me^{\sigma t}$, jei $t > 0$.

- Visų skaičių σ, kuriems teisinga ši nelygybė, tikslus apatinis rėžis σ_0, vadinamas $f(t)$ didėjimo rodikliu.

- Pirmvaizdžio $f(t)$ ribą

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = f(+0)$$

vadinsime pradine pirmvaizdžio reikšme ir žymėsime $f(0)$.

- Trūkio taške t_k pirmvaizdį $f(t)$ laikysime tolydžia iš dešinės funkcija:

$$f(t_k) = f(t_k + 0) = \lim_{t \to t_k + 0} f(t).$$

Operacinis skaičiavimas

- Funkcija

$$H(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

vadinama <u>Hevisaido</u> <u>vienetine</u> <u>funkcija</u>. Ji tenkina visas pirmvaizdžio sąlygas. Didėjimo rodiklis $\sigma_0 = 0$.

- Kiekvieną pirmvaizdį, naudojant $H(t)$, galima užrašyti taip:

$$f(t)H(t)=\begin{cases}f(t), & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

- Bet kokia funkcija $f(t)$, tenkinanti 1) ir 3) pirmvaizdžio sąlygas, padauginta iš $H(t)$, tampa pirmvaizdžiu.

- Funkcija

$$H(t-\tau)=\begin{cases}1, & t\geqslant \tau\\ 0, & t<\tau\end{cases}$$

vadinama <u>vėluojančiąja</u> <u>vienetine</u> <u>funkcija</u>. Funkcija $f(t\text{-}\tau)H(t\text{-}\tau)$ vadinama <u>vėluojančiąja</u> <u>funkcija</u>.

Vaizdo ir Laplaso transformacijos sąvokos

- Pirmvaizdžio $f(t)$ vaizdu vadinama kompleksinio kintamojo $p = \sigma + i\,\omega$ funkcija $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \mathrm{d}\, t.$$

- Šis integralas vadinamas Laplaso transformacija. Žymėsime

$$F(p) = L[f(t)],$$

$$f(t) = L^{-1}[F(p)].$$

- Pirmvaizdžio $f(t)$ vaizdas $F(p)$ yra apibrėžtas ne visoje kompleksinėje plokštumoje.

Vaizdo egzistavimo teorema

- Kiekvienas pirmvaizdis $f(t)$ turi vaizdą $F(p)$, apibrėžta pusplokštumėje $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ (didėjimo rodiklis).

Įrodymas.

$$\left|F(p)\right| = \left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\infty \left|f(t)\right|\left|e^{-(\sigma+i\omega)t}\right|\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^\infty e^{(\sigma_0-\sigma)t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= M\int_0^\infty e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\,\mathrm{d}t = -M\left.\frac{e^{-(\sigma-\sigma_0)t}}{\sigma-\sigma_0}\right|_0^\infty = \frac{M}{\sigma-\sigma_0},\ \ \sigma = \Re\, p > \sigma_0.$$

- Išvada. Jei $F(p)$ – vaizdas, tai $\lim\limits_{\Re\, p\to\infty} F(p) = 0.$

Įrodymas. Turime

$$\left|F(p)\right| \leqslant \frac{M}{\sigma-\sigma_0},\ \ \sigma > \sigma_0.$$

Tuomet, kai

$$\Re\, p = \sigma \to \infty \ \Rightarrow\ \left|F(p)\right| \to 0.$$

Vaizdo analiziškumo teorema

• Pirmvaizdžio $f(t)$ vaizdas $F(p)$ yra analizinė funkcija pusplokštumėje $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Įrodymas. Pakanka parodyti, kad $F(p)$ yra diferencijuojama bet kuriame pusplokštumės $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ taške.

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} = \int_0^\infty (-t) f(t) e^{-pt} \mathrm{d}t,$$

ir $\left|(-t) f(t) e^{-pt}\right| \leqslant M t e^{-(\sigma-\sigma_0)t}, \quad t \geqslant 0.$ Kadangi

$$\int_0^\infty M t e^{-(\sigma-\sigma_0)t} \mathrm{d}t = \frac{M}{(\sigma-\sigma_0)^2}, \quad \Re p = \sigma > \sigma_0,$$

tai integralas

$$\int_0^\infty (-t) f(t) e^{-pt} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(f(t) e^{-pt}\right) \mathrm{d}t$$

konverguoja tolygiai parametro p atžvilgiu. Reiškia, Laplaso integralą, kai $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, galima diferencijuoti parametro p atžvilgiu, t.y. $F(p)$ yra analizinė funkcija pusplokštumėje $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Tiesiškumo teorema

- Jei $L[f_1]=F_1$, $L[f_2]=F_2$, tai $L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)]=C_1 F_1(p) + C_2 f_2(p)$.

Įrodymas. Parodykime, kad $C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)$ yra pirmvazdis. 1) ir 2) pirmvaizdžio sąlygos yra patenkintos. Patikriname 3) sąlyga. Tarkime, kad

$$\left|f_1(t)\right| \leqslant M_1 e^{\sigma_1 t}, \quad \left|f_2(t)\right| \leqslant M_2 e^{\sigma_2 t}, \quad \sigma_1 > \sigma_2 .$$

Tuomet

$$\left|C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)\right| \leqslant \left|C_1\right|\left|f_1(t)\right|+\left|C_2\right|\left|f_2(t)\right| \leqslant \left|C_1\right| M_1 e^{\sigma_1 t}+\left|C_2\right| M_2 e^{\sigma_2 t} =$$

$$= \left|C_1\right| M_1 e^{\sigma_1 t}\left(1+\underbrace{\left|\frac{C_2}{C_1}\right|\frac{M_2}{M_1} e^{(\sigma_2-\sigma_1)t}}_{\leqslant 1,\ t\to\infty}\right) \leqslant M e^{\sigma_1 t}.$$

Taigi, 3) sąlyga patenkinta. Pirmvaizdžio didėjimo rodiklis yra $\max(\sigma_1,\sigma_2)$.

$$L[C_1 f_1 + C_2 f_2] = \int_0^\infty (C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t))\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t = C_1 F_1(p)+C_2 F_2(p).$$

Panašumo teorema

- Jei $\lambda > 0$ ir

$$f(t) \div F(p), \quad \text{tai} \quad f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Įrodymas. Pažymėję $\lambda t = z$, turime

$$f(\lambda t) \div \int_0^\infty f(\lambda t) e^{-pt} \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty f(z) e^{\frac{-pz}{\lambda}} \mathrm{d}z = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

- *Pastaba*. Žinant vaizdą $F(p)$ galima rasti pirmvaizdžio didėjimo rodiklį. Jis yra lygus funkcijos $F(p)$ ypatingų taškų, esančių pusplokštumėje $\operatorname{Re} p > 0$, didžiausiai realiajai komponentei. Jei ypatingų taškų nėra, tai $\sigma_0 = 0$.

Postūmio teorema

- Jei $a \in \mathbb{C}$ ir $F(p) \div f(t)$, tai $F(p-a) \div e^{at} f(t)$

Įrodymas.

$$e^{at} f(t) \div \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-pt} \mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} \mathrm{d}t = F(p-a).$$

Vėlavimo teorema

- Jei $\tau > 0$ ir $f(t) \div F(p)$, tai $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$.

Įrodymas. Vėluojančioji funkcija lygi nuliui, kai $t < \tau$, todėl

$$f(t-\tau) \div \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau) e^{-pt} \, \mathrm{d}\,t = \begin{vmatrix} t-\tau = z \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(z) e^{-pz-p\tau} \, \mathrm{d}\,t = e^{-p\tau} F(p).$$

Periodinio pirmvaizdžio vaizdas

- Jei pirmvaizdis $f(t)$ yra periodinė funkcija su periodu T, tai

$$f(t) \div \frac{\Phi(p)}{1-e^{-pT}}, \quad \text{kur} \quad \Phi(p) = \int_0^T f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Įrodymas.

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^T f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t}_{=\Phi(p)} + \underbrace{\int_T^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t}_{t=z+T,\ \ z=t-T} =$$

$$= \Phi(p) + \int_0^\infty f(z+T)\,e^{-pT}e^{-pz}\,\mathrm{d}z = \Phi(p) + e^{-pT}F(p).$$

Gavome

$$F(p) = \Phi(p) + e^{-pT}F(p) \quad \Rightarrow \quad F(p) = \frac{\Phi(p)}{1-e^{-pT}} \div f(t).$$

Pirmvaizdžio diferencijavimo teorema

- Jei $f(t)$ yra tolydi, dalimis diferencijuojama funkcija, be to, $f(t)$ ir $f\,'(t)$ yra pirmvaizdžiai, ir $F(p)$ yra pirmvaizdžio $f(t)$ vaizdas, tai

$$f\,'(t) \div pF(p) - f(0).$$

Įrodymas.

$$f\,'(t) \div \int_0^\infty f\,'(t) e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}f(t) =$$

$$= e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-p)e^{-pt}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t)}_{=0} - f(0) + pF(p) = pF(p) - f(0).$$

Riba lygi nuliui, nes

$$\left|e^{-pt} f(t)\right| \leqslant M e^{\sigma_0 t - \sigma t} = M e^{-(\sigma-\sigma_0)t} \to 0.$$

Pirmvaizdžio diferencijavimo teorema

- Išvada

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

arba
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(t) \div p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0).$$

Įrodymas. Tegu n=2.

$$f^{(2)}(t) = (f'(t))' \div p\left[p F(p) - f(0)\right] - f'(0) =$$

$$= p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)$$

Pirmvaizdžio integravimo teorema

- Jei $f(t) \div F(p)$, tai $\int\limits_0^t f(z)\,\mathrm{d}z \div \dfrac{F(p)}{p}.$

Įrodymas. Parodysime, kad integralas yra pirmvaizdis.

$$\left|\int\limits_0^t f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int\limits_0^t \left|f(z)\right|\mathrm{d}z \leqslant M\int\limits_0^t e^{\sigma_0 z}\,\mathrm{d}z = \frac{M}{\sigma_0}\left(e^{\sigma_0 t}-1\right) < \frac{M}{\sigma_0}e^{\sigma_0 t}.$$

Gavome, kad integralas yra pirmvaizdis su didėjimo rodikliu σ_0. Toliau,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_0^t f(z)\,\mathrm{d}z = f(t) \;\Rightarrow\; L\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_0^t f(z)\,\mathrm{d}z\right\} = F(p).$$

$$pL\left\{\int\limits_0^t f(z)\,\mathrm{d}z\right\} - \underbrace{\int\limits_0^0 f(z)\,\mathrm{d}z}_{=0} = F(p).$$

Gavome

$$L\left\{\int\limits_0^t f(z)\,\mathrm{d}z\right\} = \frac{F(p)}{p}.$$

Vaizdo diferencijavimo teorema

- Jei $F(p) \div f(t)$, tai $F'(p) \div -t\,f(t)$.

Įrodymas.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t.$$

$$F'(p) = \int_0^{\infty} \underbrace{(-t)\,f(t)}_{\div\, F'(p)} e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t.$$

- Išvada.

$$F^{(n)}(p) \div (-t)^n f(t).$$

Vaizdo integravimo teorema

- Jei $F(p)$ yra pirmvaizdžio $f(t)$ vaizdas ir $f(t)/t$ yra pirmvaizdis, tai

$$\int_p^\infty F(u)\,\mathrm{d}u \div \frac{f(t)}{t}.$$

Pradinės reikšmės teorema

- Jei $f(t)$, $f'(t)$ yra pirmvaizdžiai, ir $F(p)$ yra pirmvaizdžio $f(t)$ vaizdas, tai

$$\lim_{\Re p \to \infty} pF(p) = f(0) = \lim_{t \to +0} f(t).$$

Įrodymas. Pažymėkime $f'(t) = f_1(t) \div F_1(p)$.

Tuomet

$$\underbrace{\lim_{\Re p \to \infty} F_1(p)}_{=0} = \lim_{\Re p \to \infty} pF(p) - f(0).$$

Ribinės reikšmės teorema

- Jei $f(t)$, $f'(t)$ yra pirmvaizdžiai, ir $F(p)$ yra pirmvaizdžio $f(t)$ vaizdas, tai

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Įrodymas. Pažymėkime $f'(t) = f_1(t) \div F_1(p)$.

Tuomet

$$\underbrace{pF(p) - f(0)}_{=F_1(p)} = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

$$\lim_{p\to 0} pF(p) - f(0) = \lim_{p\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0).$$

Pirmvaizdžių sąsuka

- Funkcija $$f(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

vadinama funkcijų $f_1(\tau)$ ir $f_2(\tau)$ sąsuka ir žymima $f_1(\tau)*f_2(\tau)$

- Sąsukos operacija yra komutatyvi.

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\left|\begin{matrix} t-\tau=\theta \\ \tau=t-\theta \\ \mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}\theta \end{matrix}\right|=$$
$$=-\int_t^0 f_1(t-\theta)f_2(\theta)\,\mathrm{d}\theta=f_2(t)*f_1(t).$$

- Pirmvaizdžių sąsuka yra pirmvaizdis. Tarkime, kad

$$\left|f_1(t)\right|\leqslant M_1e^{\sigma_1 t},\quad \left|f_2(t)\right|\leqslant M_2e^{\sigma_2 t},\quad \sigma_1>\sigma_2.$$

Tuomet

$$\left|f(t)\right|\leqslant M_1M_2\int_0^t e^{\sigma_1\tau}e^{\sigma_2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau=\frac{M_1M_2}{\sigma_1-\sigma_2}e^{\sigma_2 t}\left(e^{(\sigma_1-\sigma_2)t}-1\right)<\frac{M_1M_2}{\sigma_1-\sigma_2}e^{\sigma_1 t}.$$

Vaizdų sandaugos teorema (Borelio formulė)

- Jei $F_1(p) \div f_1(t)$, $F_2(p) \div f_2(t)$, tai $F_1(p)F_2(p) \div f_1(t) * f_2(t)$.

Įrodymas.

$$f_1(t) * f_2(t) = f(t) \div F(p) = \int_0^\infty \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-pt} \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \int_\tau^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-pt} \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau \int_\tau^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-pt} \mathrm{d}t =$$

$$= \begin{vmatrix} t-\tau = z \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}z \end{vmatrix} = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} \mathrm{d}\tau \int_0^\infty f_2(z) e^{-pz} \mathrm{d}z = F_1(p) F_2(p).$$

Diuamelio formulė

- Jei $f_1(t)$, $f_1'(t)$, $f_2(t)$, $f_2'(t)$ yra pirmvaizdžiai, $F_1(p)$ yra pirmvaizdžio $f_1(t)$ vaizdas, $F_2(p)$ yra pirmvaizdžio $f_2(t)$ vaizdas, tai

$$pF_1(p)F_2(p) \div f_1(t)f_2(0) + f_1(t) * f_2'(t) = f_1(0)f_2(t) + f_1'(t) * f_2(t).$$

Atvirkštinė Laplaso transformacija

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} \, \mathrm{d}\, p.$$

- *Įrodymas*. Imkime Furje transformacija ir atvirkštinė Furje transformacija:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\, t, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\, \omega.$$

Užrašykime Furje transformaciją funkcijai $f(t)\, e^{-\sigma t}$:

$$\overbrace{F(\sigma, \omega)}^{= F(p)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\overbrace{(\sigma + i\omega)}^{= p} t} \mathrm{d}\, t,$$

Tai yra Laplaso transormacija. Užrašykime atvirkštinę Furje transformaciją funkcijai $f(t)\, e^{-\sigma t}$:

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{i\omega t} \mathrm{d}\, \omega =$$

Atvirkštinė Laplaso transformacija

$$= \left| \begin{array}{c} p = \sigma + i\,\omega \\ \mathrm{d}\,\omega = \dfrac{\mathrm{d}\,p}{i} \\ \omega = -i\,p + i\,\sigma \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma - i\infty} F(p) e^{i(-i\,p + i\,\sigma)t} \,\mathrm{d}\,p \Rightarrow$$

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma - i\infty} F(p) e^{(p-\sigma)t} \,\mathrm{d}\,p .$$

arba

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} \,\mathrm{d}\,p .$$

- Taikyti atvirkštinės Laplaso transformacijos formulę nėra paprasta. Todėl, atskirais atvejais, kai vaizdas $F(p)$ tenkina tam tikrus apribojimus, pirmvaizdį galima rasti paprasčiau.

Pirmoji vaizdų ir pirmvaizdžių atitikties teorema

- Jeigu vaizdas $F(p)$ yra analizinė funkcija taško $p = \infty$ aplinkoje, $\lim\limits_{\Re p \to \infty} F(p) = 0$ ir funkcija $F(p)$ žiede $R < |p| < \infty$ išreikšta Lorano eilute (*)

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n},$$

tai pirmvaizdis

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}, \quad t > 0$$

- Išvada. Jei vaizdas $F(p)$ išreikštas Lorano eilute (*), tai pirmvaizdį galima gauti, panariui taikydami atitiktį

$$\frac{c_n}{p^n} \div \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Antroji vaizdų ir pirmvaizdžių atitikties teorema

- Jeigu vaizdas $F(p)$ yra analizinė pusplokštumėje Re $p > \sigma_0 \geq 0$ funkcija ir neturi kitų ypatingųjų taškų, išskyrus polius $p_1, p_2, \ldots, p_n$, be to $F(p) \to 0$, kai $|\mathrm{p}| \to \infty$, tai pirmvaizdis

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{p=p_k}{Res}\left(F(p)e^{pt}\right).$$

Taisyklingųjų racionaliųjų trupmenų pirmvaizdžiai

- Tarkime, vaizdas

$$F(p)=\frac{P_m(p)}{Q_n(p)},\quad m<n.$$

1 *atvejis*. Funkcijos $F(p)$ poliai $p_1, p_2, \ldots, p_q$, yra atitinkamai $l_1, l_2, \ldots, l_q$ eilės ir $\sum l_i = n$:

$$F(p)=\frac{P_m(p)}{q_n(p-p_1)^{l_1}(p-p_2)^{l_2}\ldots(p-p_q)^{l_q}}.$$

Gauname pirmvaizdį

$$f(t)=\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{(l_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{\mathrm{d}^{l_k-1}}{\mathrm{d}p^{l_k-1}}\left\{(p-p_k)^{l_k}F(p)e^{pt}\right\}.$$

Taisyklingųjų racionaliųjų trupmenų pirmvaizdžiai

2 *atvejis*. Funkcijos $F(p)$ poliai $p_1, p_2, \ldots, p_n$, yra pirmosios eilės. Tuomet

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Tiesinės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais

- Tarkime, duota n-osios eilės tiesinė diferencialinė lygtis su pastovoais koeficientais:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = f(t), \quad a_n \neq 0, \; x = x(t), \; t \geqslant 0,$$

- Reikia rasti atskirą sprendinį, tenkinanti pradines sąlygas

$$x(0) = x_0, \; x'(0) = x_0', \; \ldots, \; x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

- Tarkime, funkcijos $f(t)$ ir $x(t)$ su savo išvestinėmis yra pirmvaizdžiai. Tada egzistuoja ir vaidai. Tegu

$$f(t) \div F(p), \quad x(t) \div X(p)$$

- Turime

$$x'(t) \div p X(p) - x_0$$
$$x^{(2)}(t) \div p^2 X(p) - p x_0 - x_0'$$
$$\ldots$$
$$x^{(n)}(t) \div p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x_0' - \ldots - p x_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}$$

Tiesinės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais

- Iš Laplaso transformacijos tiesiškumo išplaukia, kad

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x \div$$

$$\div \underbrace{(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)}_{= A_n(p)} X(p) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (a_{n-1} p^{k-1} + a_{n-2} p^{k-2} + \ldots + a_{n-k}) x_0^{(n-k)}}_{= B_{n-1}(p)}$$

- Gauname operatorinę lygtį

$$A_n(p) X(p) - B_{n-1}(p) = F(p)$$

ir operatorinį sprendinį

$$X(p) = \frac{F(p) + B_{n-1}(p)}{A_n(p)}.$$

- Suradę pirmvaizdį $x(t)$, gausime tiesinės diferencialinės lygties atskirą sprendinį, tenkinanti pradines sąlygas.

Diuamelio formulės taikymas

- Diuamelio formulės taikymas, sprendžiant tiesines diferencialines lygtys su pastoviais koeficientais ir nulinėmis pradinėmis sąlygomis,

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = f(t), \quad a_n \neq 0,\ x = x(t),\ t \geqslant 0,$$

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = 0.$$

- Kadangi pradinės sąlygos nulinės, tai $B_{n\text{-}1}(p) = 0$ ir

$$A_n(p) X(p) = F(p).$$

- Tegu $f(t) = 1$. Pažymėkime tokios diferencialinės lygties atskirą sprendinį, tenkinanti nulines sąlygas, kaip $x_1(t)$, jo vaizdą – kaip $X_1(t)$

$$X_1(p) = \frac{F(p)}{A_n(p)} = \frac{1}{p A_n(p)},$$

- Dabar turime

$$X(p) = \frac{F(p)}{A_n(p)} = pX_1(p) F(p).$$

Diuamelio formulės taikymas

- Taigi,

$$X(p) = pX_1(p)F(p).$$

- Pagal Diuamelio formulę

$$pF_1(p)F_2(p) \div f_1(0)f_2(t) + f_1'(t) * f_2(t).$$

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Tiesinių diferencialių lygčių sistemos

- Tiesinių diferencialinių lygčių su pastoviais koeficientais sistemos operaciniu metodu sprendžiamos taip pat kaip ir viena tiesinė diferencialinė lygtis.

- Kiekvienai lygčiai taikoma laplaso transformacija, o po to sprendžiama gauta operatorinių lygčių sistema. Jos sprendinys yra duotosios tiesinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinio vaizdas. Taikydami jam atvirkštinę Laplaso transformaciją, randame ieškomą sprendinį.